Analista Universitario en Sistemas
Probabilidad y Estadística
Práctica 6

Ing. Alejandro C. Rodríguez Costello

28 de diciembre de 2010

Inferencia estadística

Ejercicio 1 *Sea $X_1, X_2, \ldots, X_7$ una muestra aleatoria de una población que tiene media μ y varianza σ^2. Considere las siguientes estimadores de μ:*

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_7}{7}$$

$$\hat{\Theta}_2 = \frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}$$

a. *¿Alguno de estos estimadores es insesgado?*

b. *Calcule la eficiencia relativa de los dos estimadores*

Ejercicio 2 *Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n:*

a. *Demuestre que $\overline{X}^2$ es un estimador sesgado de μ^2.*

b. *Determine la magnitud del sesgo en este estimador.*

c. *¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño n de la muestra?*

Ejercicio 3 *Considere la distribución exponencial:*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de λ, basado en una muestra aleatoria de tamaño n.

Ejercicio 4 *Se fabrica tubería PVC con un diámetro promedio de 1.01 in y desviación estándar de 0.003 in. Encuentre la probabilidad de que en una muestra aleatoria de $n = 9$ secciones de tubería, el diámetro promedio de la muestra sea mayor que 1.009 in y menor que 1.012 in.*

Ejercicio 5 *Suponga que se toman muestras aleatorias de tamaño $n = 25$ de una población normal con media 100 y desviación estándar 10. ¿Cuál es la posibilidad de que la media muestral se encuentre dentro del intervalo $\mu_{\overline{x}} - 1{,}8\sigma_{\overline{x}}$ a $\mu_{\overline{x}} + 1{,}0\sigma_{\overline{x}}$?*

Ejercicio 6 *En la fabricación de una alfombra se utiliza una fibra sintética con una resistencia a la tensión que tiene una distribución normal con media 75.5 psi y desviación estándar 3.5 psi. Encuentre la probabilidad de que en una muestra aleatoria de $n = 6$ especímenes de fibra, la media de la resistencia a la tensión de la muestra sea mayor que 75.75 psi.*

Ejercicio 7 *Considere la fibra sintética del ejercicio anterior. ¿Cómo cambia la desviación estándar de la media muestral cuando el tamaño de la muestra aumenta de $n = 6$ a $n = 49$?*

Ejercicio 8 *La resistencia a la compresión del concreto tiene una media de 2500 psi y una desviación estándar de 50 psi. Encuentre la probabilidad de que la media muestral de una muestra aleatoria de $n = 5$ especímenes esté en el intervalo de 2499 a 2510 psi.*

Ejercicio 9 *Considere los especímenes de concreto del ejemplo anterior. ¿Cuál es el error estándar de la media muestral?*

Ejercicio 10 *Una población normal tiene una media de 100 y una varianza de 25. ¿De qué tamaño debe ser la muestra aleatoria que se tome de esta población para que el error estándar del promedio de la muestra sea 1.5?*

Ejercicio 11 *El tiempo que un pasajero invierte esperando en un punto de revisión de un aeropuerto es una variable aleatoria con una media de 8.2 minutos y desviación estándar de 1.5 minutos. Suponga que se observa una muestra aleatoria de $n = 49$ pasajeros. Encuentre la probabilidad de que el tiempo de espera promedio en la fila para estos clientes sea:*

a. *Menor que 10 minutos.*

b. *Entre 5 y 10 minutos.*

c. *Menor que 6 minutos.*

Ejercicio 12 *Se toma una muestra aleatoria de $n_1 = 16$ de una población normal que tiene una media de 75 y una desviación estándar de 8. De una población normal se toma una muestra aleatoria de tamaño $n_2 = 9$; esta población tiene una media de 70 y una desviación estándar de 12. Sean $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ las medias de cada muestra, respectivamente. Encuentre:*

a. *La probabilidad de que $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ sea mayor que cuatro.*

b. *La probabilidad de que $3{,}5 \leq \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \leq 5{,}5$.*

Ejercicio 13 *La elasticidad de un polímero es afectada por la concentración de un reactivo. Cuando se utiliza una concentración baja, la elasticidad promedio verdadera es 55, mientras que cuando se emplea una concentración alta, la elasticidad promedio es 60. La desviación estándar de la elasticidad es 4, sin importar cuál sea la concentración. Si se toman dos muestras aleatorias de tamaño 16, encuentre la probabilidad de que $\overline{X}_{alta} - \overline{X}_{baja} \geq 2$.*

Ejercicio 14 *Se sabe que la duración, en horas, de un foco de 75 watts tiene una distribución aproximadamente normal, con una desviación estándar de $\sigma = 0{,}001$ mm. Una muestra aleatoria de 15 anillos tiene un diámetro promedio de $\overline{x} = 74{,}036$ mm.*

a. *Construya un intervalo de confianza bilateral del 99 % para el diámetro promedio del anillo.*

b. *Construya un límite inferior de confianza del 95 % para el diámetro promedio del anillo.*

c. *Supóngase que se desea una confianza del 95 % en que el error en la estimación de la duración promedio sea menor que 5 horas. ¿Qué tamaño de muestra debe utilizar?*

d. *Supóngase que se desea que el ancho total del intervalo de confianza bilateral sea de seis horas, con una confianza del 95 %. ¿Qué tamaño de muestra debe emplearse para este fin?*

Ejercicio 15 *Se utilizan dos máquinas para llenar botellas de plástico con detergente para máquinas lavaplatos. Se sabe que las desviaciones estándar del volumen de llenado son $\sigma_1 = 0{,}10$ onzas de líquido, y $\sigma_2 = 0{,}15$ onzas de líquido para las dos máquinas, respectivamente. Se toman dos muestras aleatorias, $n_1 = 12$ botellas de la máquina 1 y $n_2 = 10$ botellas de la máquina 2. Los volúmenes promedio de llenado son $\overline{x}_1 = 30{,}87$ onzas de líquido, y $\overline{x}_2 = 30{,}68$ onzas de líquido.*

a. *Construya un intervalo de confianza bilateral del 90 % para la diferencia entre medias del volumen de llenado.*

b. *Construya un intervalo de confianza bilateral del 95 % para la diferencia entre medias del volumen de llenado. Compare el ancho de este intervalo con el ancho calculado en el inciso A.*

c. *Construya un intervalo de confianza superior del 95 % para la diferencia de medias del volumen de llenado.*

Ejercicio 16 *Se prueban dos fórmulas diferentes de un combustible oxigenado para motor en cuanto al octanaje. La varianza del octanaje para la fórmula 1 es $\sigma_1^2 = 1{,}5$, mientras que para la fórmula 2 es $\sigma_2^2 = 1{,}2$. Se prueban dos muestras aleatorias de tamaño $n_1 = 15$ y $n_2 = 20$. Los octanajes promedio observados son $\overline{x}_1 = 89{,}6$ y $\overline{x}_2 = 92{,}5$.*

a. *Construya un intervalo de confianza bilateral del 95 % para la diferencia en el octanaje promedio.*

b. *¿Qué tamaño de muestra se requiere para cada problación si se desea tener una confianza del 95 % de que el error al estimar la diferencia entre las medias de octanaje sea menor que uno?*

Ejercicio 17 *Considere el intervalo de confianza para μ con desviación estándar σ conocida:*

$$\overline{x} - z_{\alpha_1}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{x} + z_{\alpha_2}\sigma/\sqrt{n}$$

donde $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Sea $\alpha = 0{,}05$. Encuentre el intervalo para el que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2 = 0{,}025$. Ahora encuentre el intervalo para el caso donde $\alpha_1 = 0{,}01$ y $\alpha_2 = 0{,}04$. ¿Qué intervalo es más pequeño? ¿Existe alguna ventaja con respecto al intervalo de confianza "simétrico"?

Ejercicio 18 *En un proceso químico se fabrica cierto polímero. Normalmente, se hacen mediciones de viscosidad después de cada corrida, y la experiencia acumulada indica que la variabilidad en el proceso es muy estable, con $\sigma = 20$. Las siguientes son 15 mediciones de viscosidad por corrida: 724, 718, 776, 760, 745, 759, 795, 756, 742, 740, 761, 749, 739, 747, 742. Encuentre un intervalo de confianza bilateral del 90 % para la viscosidad media del polímero.*

Ejercicio 19 *Se piensa que la concentración del ingrediente activo de un detergente líquido para ropa, es afectada por el tipo de catalizador utilizado en el proceso de fabricación. Se sabe que la desviación estándar de la concentración activa es de 3 g/l, sin importar el tipo de catalizador utilizado. Se realizan 10 observaciones con cada catalizador, y se obtienen los siguientes datos:*

Catalizador 1:	57.9	66.2	65.4	65.4	65.2	62.6	67.6	63.7	67.2	71.0
Catalizador 2:	66.4	71.7	70.3	69.3	64.8	69.6	68.8	69.4	65.3	68.8

a. *Encuentre un intervalo de confianza del 95 % para la diferencia entre las medias de las concentraciones activas para los dos catalizadores.*

b. *¿Existe alguna evidencia que indique que las concentraciones activas medias dependen del catalizador utilizado?*

Ejercicio 20 *Un ingeniero civil hace pruebas con la resistencia a la comprensión del concreto. Para ello examina 12 especímenes y obtiene los siguientes datos:*

2216	2237	2249	2204
2225	2301	2281	2263
2318	2255	2275	2295

a. *Construya un intervalo de confianza bilateral del 95 % para la resistencia promedio.*

b. *Construya un intervalo de confianza inferior del 95 % para la resistencia promedio.*

Ejercicio 21 *Un ingeniero de control de calidad midió el espesor de la pared de 25 botellas de vidrio de dos litros. La media muestral es $\overline{x} = 4{,}05$ mm, mientras que la desviación estándar muestral es $s = 0{,}08$ mm. Encuentre un intervalo de confianza del 90 % para la media del espesor de la pared de las botellas.*

Ejercicio 22 *Una máquina de bebidas con mezclado posterior se ajusta de modo que libere una cierta cantidad de jarabe en una cámara donde será mezclado con agua carbonatada. De una muestra aleatoria de 25 bebidas se tiene que el contenido medio de jarabe es $\overline{x} = 1{,}10$ onzas de líquido, con una desviación estándar $s = 0{,}015$ onzas de líquido. Encuentre un intervalo de confianza bilateral del 90 % para la cantidad promedio de jarabe mezclado en cada bebida.*

Ejercicio 23 *Se toman dos muestras aleatorias de tamaños $n_1 = 15$ y $n_2 = 10$ de dos termocoples diferentes. Las medias y las varianzas muestrales son $\overline{x}_1 = 300$, $s_1^2 = 16$, $\overline{x}_2 = 305$ y $s_2^2 = 49$. Suponga que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Construya un intervalo de confianza bilateral del 95 % para $\mu_1 - \mu_2$. ¿Qué conclusión puede obtenerse sobre las lecturas de temperatura promedio de los dos termocoples?.*

Ejercicio 24 *Considere los datos de concentración activa del ejercicio 19. Suponga que la concentración activa está distribuida normalmente, y que la varianza de la concentración activa de ambos tipos de catalizadores es desconocida.*

a. *Encuentre un intervalo de confianza del 95 % para la diferencia entre las medias de las concentraciones activas, suponiendo que ambas varianzas son iguales.*

b. *Compare la longitud del intervalo de confianza calculado en el inciso A, con la longitud del intervalo de confianza obtenido en el ejercicio 19. ¿Qué intervalo es mayor? ¿Por qué?*

c. *Encuentre un intervalo de confianza del 95 % para la diferencia entre las concentraciones activas promedio, suponiendo que las varianzas no son iguales. Compare este intervalo de confianza con el obtenido en el inciso A. ¿Cuán diferentes son los intervalos?*

Ejercicio 25 *Un científico de la computación está investigando la utilidad de dos lenguajes de diseño para mejorar las tareas de programación. Se pide a doce programadores expertos, familiarizados con los dos lenguajes, que codifiquen una función estándar en ambos lenguajes, anotando el tiempo, en minutos, que requieren para hacer esta tarea. Los datos obtenidos son los siguientes:*

Programador	*Tiempo*	
	Lenguaje de diseño 1	*Lenguaje de diseño 2*
1	17	18
2	16	14
3	21	19
4	14	11
5	18	23
6	24	21
7	16	10
8	14	13
9	21	19
10	23	24
11	13	15
12	18	20

Encuentre un intervalo de confianza del 95 % para la diferencia en los tiempos de codificación promedio. ¿Existe algo que indique una preferencia por alguno de los lenguajes?

Ejercicio 26 *Considere los datos del ejercicio 20. Construya lo siguiente.*

a. *Un intervalo de confianza bilateral del 99 % para* σ^2.

b. *Un intervalo de confianza inferior del 99 % para* σ^2.

c. *Un intervalo de confianza superior del 99 % para* σ^2.

Ejercicio 27 *Construya un intervalo de confianza bilateral del 95 % para la varianza de los datos de espesor del ejercicio 21.*

Ejercicio 28 *De 100 casos de cáncer pulmonar seleccionados al azar, 823 son de pacientes que fallecieron.*

a. *Construya un intervalo de confianza bilateral del 95 % para la tasa de mortalidad del cáncer pulmonar.*

b. *¿Cuán grande debe ser el tamaño de la muestra requerida para tener una confianza de al menos el 95 % de que el error al estimar la tasa de mortalidad del cáncer pulmonar sea menor que el 0.03?*

Ejercicio 29 *Un fabricante de calculadoras electrónicas está interesado en estimar la fracción de unidades defectuosas producidas. Se toma una muestra aleatoria de 800 calculadoras, de las cuales 10 resultan defectuosas. Calcule un intervalo de confianza superior del 99 % para la fracción de calculadoras defectuosas.*

Ejercicio 30 *Se lleva a cabo un estudio para determinar el porcentaje de hogares donde hay al menos dos televisores. ¿De qué tamaño debe ser la muestra si se desea tener una confianza del 99 % de que el erro al estimar esta cantidad es menor que 0.017?*

Ejercicio 31 *Se analiza la fracción de productos defectuosos producidos por dos líneas de producción. Una muestra aleatoria de 100 unidades provenientes de la línea 1 contiene 10 que son defectuosas, mientras que una muestra aleatoria de 120 unidades de la línea 2 tiene 25 que son defectuosas. Encuentre un intervalo de confianza del 99 % para la diferencia en fracciones de productos defectuosos producidos por las dos líneas.*

Ejercicio 32 *La siguiente es una lista diaria de la temperatura (°F) que tiene la descarga de líquidos de una planta de tratamiento de aguas negras. Encuentre un intervalo de tolerancia del 95 % que contenga al menos el 90 % de las temperaturas de descarga de esta planta de tratamiento.*

41	45	39	44	41
43	52	43	43	45
41	44	47	44	39
42	39	48	46	44
41	46	47	44	50

Ejercicio 33 *Un fabricante de fibras textiles está investigando una nueva fibra para tapicería, de la cual tiene una elongación media por hilo de 12 kg con una desviación estándar de 0.5 kg. La compañía desea probar la hipótesis* $H_0 : \mu = 12$ *contra* $H_0 : \mu < 12$*, utilizando para ello una muestra aleatoria de cuatro especímenes.*

a. *¿Cuál es la probabilidad del error tipo I si la región crítica está definida como* $\overline{x} < 11{,}5$ *kg?*

b. *Encuentre* β *para el caso donde la verdadera elongación promedio es 11.25 kg.*

c. *Encuentre la frontera de la región crítica si la probabilidad del error tipo I es 0.05.*

Ejercicio 34 *El calor emanado, en calorías por gramo, de una mezcla de cemento tiene una distribución aproximadamente normal. Se piensa que la media es 100 y que la desviación estándar es 2. Se desea probar* $H_0 : \mu = 100$ *contra* $H_0 : \mu \neq 100$ *con una muestra de* $n = 9$ *especímenes.*

a. *Si se define la región de aceptación como* $98{,}5 \leq \overline{x} \leq 101{,}5$*, encuentre la probabilidad* α *del error tipo I.*

b. *Encuentre* β *para el caso donde la media verdadera del calor emanado es 103.*

c. *Encuentre* β *para el caso donde la media verdadera del calor emanado es 105. Este valor de* β *es más pequeño que el obtenido en el inciso B. ¿Por qué?*

Ejercicio 35 *Una compañía de productos para el consumidor está desarrollando un nuevo champú, y está interesada en la altura de la espuma (en mm). La altura de la espuma tiene una distribución aproximadamente normal, con una desviación estándar de 20 mm. La compañía desea probar* $H_0 : \mu = 175$ *mm contra* $H_0 : \mu > 175$ *mm, utilizando los resultados obtenidos con* $n = 10$ *muestras.*

a. *Encuentre la probabilidad* α *del error tipo I si la región crítica es* $\overline{x} > 185$.

b. *¿Cuál es la probabilidad del error tipo II si la verdadera altura promedio de la espuma es 195 mm?*

c. *Supongase que la media muestral es* $\overline{x} = 190$ *mm. ¿A qué conclusión puede llegarse?*

d. *¿Cuán "inusual" es el valor muestral* $\overline{x} = 190$ *mm si el valor verdadero de la media es 175 mm? Esto es, ¿cuál es la probabilidad de observar un promedio muestral tan grande como 190 mm (o mayor), si la verdadera altura promedio de la espuma es 175 mm?*

e. *Repita los primeros 2 puntos suponiendo que el tamaño de la muestra es* $n = 16$ *y que los límites de la región crítica son los mismos.*

f. *¿Dónde debe colocarse la frontera de la región crítica si se desea que la probabilidad del error tipo I siga siendo la misma que cuando el tamaño de la muestra era* $n = 10$*?*

g. *Con* $n = 16$ *y la región crítica determinada en el inciso anterior, encuentre la probabilidad* β *del error tipo II si el valor verdadero de la altura promedio de la espuma es 190 mm.*

h. *Compare el valor de* β *obtenido en el inciso anterior con el calculado en el inciso b. ¿A qué conclusión puede llegar?*

i. *Suponga que el fabricante desea que la probabilidad del error tipo I para la prueba sea* $\alpha = 0{,}05$. *¿Dónde debe localizarse la región de aceptación?*

Ejercicio 36 *Construya una curva CO*[1] *para el ejercicio anterior, utilizando los siguientes valores para la media verdadera* μ*: 178, 181, 184, 187, 190, 193, 196 y 199. Luego convierta la curva CO en una gráfica de la función de potencia de la prueba.*

Ejercicio 37 *Se toma una muestra aleatoria de 500 habitantes de cierta ciudad de Estados Unidos, y se les pregunta si están a favor de usar todo el año combustibles oxigenados para reducir la contaminación. Si más de 400 personas responden de manera afirmativa, entonces se concluye que al menos el 60 % de los habitantes está a favor del empleo de este tipo de combustibles.*[2]

a. *Encuentre la probabilidad del error tipo I si exactamente el 60 % de los habitantes están a favor del empleo de éstos combustibles.*

b. *¿Cuál es la probabilidad* β *del error tipo II si sólo el 49 % de los habitantes están a favor de tal medida?*

Ejercicio 38 *Se cree que la proporción de habitantes de cierta ciudad que está a favor de la construcción de carreteras de peaje para completar el sistema de autopistas, es* $p = 0{,}3$. *Si una muestra aleatoria de 10 habitantes indica que uno o menos está a favor de esta propuesta, entonces se concluye que* $p < 0{,}3$.

[1] Si se hace una gráfica de la probabilidad de aceptar $H_0 : \mu = \mu_0$ contra varios valores de μ, y se unen los puntos con una curva suave, se obtiene la curva característica de operación (o curva CO) del procedimiento de prueba. Estas curvas se emplean de manera extensa en aplicaciones industriales de la prueba de hipótesis para visualizar la sensibilidad y el desempeño relativo de la prueba. Cuando el valor verdadero de la media es igual a μ_0, la probabilidad de aceptar H_0 es $1 - \alpha$.

[2] *Sugerencia:* utilice la aproximación normal de la distribución binomial.

a. *Encuentre la probabilidad del error tipo I si la verdadera proporción es* $p = 0{,}3$.

b. *Encuentre la probabilidad de cometer un error tipo II con este procedimiento si* $p = 0{,}5$.

c. *¿Cuál es la potencia de este procedimiento si la verdadera proporción es* $p = 0{,}6$*?*

Ejercicio 39 *Se estima que la proporción de adultos que viven en cierta región, que tienen una licenciatura es* $p = 0{,}4$*. Para probar esta hipótesis, se toma una muestra aleatoria de 15 adultos. Si el número de ellos que tienen una licenciatura se encuentra entre cuatro y ocho, la hipótesis será aceptada; en cualquier otro caso, se concluye que* $p \neq 0{,}4$.

a. *Encuentre la probabilidad del error tipo I para este procedimiento, suponiendo que* $p = 0{,}4$.

b. *Encuentre la probabilidad de cometer un error de tipo II si la proporción real es* $p = 0{,}2$.

Ejercicio 40 *Se estudia el rendimiento de un proceso químico. De la experiencia previa con este proceso, se sabe que la desviación estándar del rendimiento es 3. En los cinco días anteriores de operación de la planta, se han observado los siguientes rendimientos: 91.6 %, 88.75 %, 90.8 %, 89.95 % y 91.3 %. Utilice* $\alpha = 0{,}05$.

a. *¿Existe evidencia de que el rendimiento no es del 90 %?*

b. *¿Cuál es el valor* P *de esta prueba?*

c. *¿Qué tamaño de muestra se requiere para detectar un rendimiento promedio verdadero de 85 % con una probabilidad de 0.95?*

d. *¿Cuál es la probabilidad del error tipo II si el rendimiento promedio verdadero es 92 %?*

Ejercicio 41 *Considere los datos del ejercicio 14.*

a. *¿Existe evidencia que apoye la afirmación de que la duración promedio del foco es mayor que 1000 horas? Utilice* $\alpha = 0{,}01$.

b. *¿Cuál es el valor* P *para la prueba del inciso A?*

c. *¿Cuál es el valor de* β *para la prueba del inciso A si la verdadera duración promedio del foco es 1050 horas?*

d. *¿Qué tamaño de muestra se necesita para asegurar que* β *no es mayor que 0.10 si la duración promedio verdadera del foco es 1025 horas?*

Ejercicio 42 *Se utilizan dos máquinas para llenar botellas de plástico con un volumen neto de 16.0 onzas. Las distribuciones de los volúmenes de llenado pueden suponerse normales, con desviaciones estándar* $\sigma_1 = 0{,}020$ *y* $\sigma_2 = 0{,}025$ *onzas. Un miembro del grupo de ingeniería de calidad sospecha que el volumen neto de llenado de ambas máquinas es el mismo, sin importar si éste es o no de 16 onzas. De cada máquina se toma una muestra aleatoria de 10 botellas.*

Máquina 1		*Máquina 2*	
16.03	*16.01*	*16.02*	*16.03*
16.04	*15.96*	*15.97*	*16.04*
16.05	*15.98*	*15.96*	*16.02*
16.05	*16.02*	*16.01*	*16.01*
16.02	*15.99*	*15.99*	*16.00*

a. *¿Se encuentra el ingeniero en lo correcto? Utilice* $\alpha = 0{,}05$.

b. *¿Cuál es el valor* P *de esta prueba?*

c. *Si se supone que el tamaño de las muestras es el mismo, ¿qué tamaño de muestra debe utilizarse para asegurar que* $\beta = 0{,}05$ *si la diferencia verdadera entre las medias es de 0.08? Suponga que* $\alpha = 0{,}05$.

d. *¿Cuál es la potencia de la prueba del inciso A si la diferencia verdadera entre las medias es de 0.08?*

Ejercicio 43 *Considere los datos del ejercicio 15.*

a. *Pruebe la hipótesis de que ambas máquinas tienen el mismo volumen de llenado. Utilice* $\alpha = 0{,}05$.

b. *¿Cuál es el valor* P *de la prueba del inciso A?*

c. *Si el valor de* β *de la prueba, cuando la verdadera diferencia en el volumen de llenado es 0.2 onzas de fluido, no debe ser mayor que 0.1, ¿qué tamaño de muestras es necesario emplear? Utilice* $\alpha = 0{,}05$.