Analista Universitario en Sistemas
Probabilidad y Estadística
Práctica 4

Ing. Alejandro C. Rodríguez Costello

26 de mayo de 2009

Distribuciones de probabilidad conjunta

Ejercicio 1 *Demuestre que la siguiente función satisface las propiedades de una función de probabilidad conjunta.*

x	y	$f_{XY}(x,y)$
1,5	2	1/8
1,5	3	1/4
2,5	4	1/2
3	5	1/8

Calcule las siguientes probabilidades:

a. $P(X < 2{,}5\ ,\ Y < 3)$

b. $P(X < 2{,}5)$

c. $P(Y < 3)$

d. $P(X > 1{,}8\ ,\ Y > 4{,}7)$

e. *Determine* $E(X)$ *y* $E(Y)$.

f. *Determine la distribución de probabilidad marginal de la variable aleatoria* X.

g. *Determine la distribución de probabilidad condicional de* Y *dado que* $X = 1{,}5$.

h. *Determine la distribución de probabilidad condicional de* X *dado que* $Y = 2$.

Ejercicio 2 *Calcule el valor de* c *que hace que la función* $f(x,y) = c(x+y)$ *sea una función de probabilidad conjunta sobre los nueve puntos con* $x = 1,2,3$ *e* $y = 1,2,3$.
Calcule las siguientes probabilidades:

a. $P(X = 1\ ,\ Y < 4)$

b. $P(X = 1)$

c. $P(Y = 2)$

d. $P(X < 2\ ,\ Y < 2)$

e. *Determine* $E(X)$ *y* $V(X)$.

f. *Determine la distribución de probabilidad marginal de la variable aleatoria* X.

g. *Determine la distribución de probabilidad condicional de* Y *dado que* $X = 1$.

h. *Determine la distribución de probabilidad condicional de* X *dado que* $Y = 2$.

Ejercicio 3 *Demuestre que la siguiente función satisface las propiedades de una función de probabilidad conjunta.*

x	y	$f_{XY}(x,y)$
-1	-2	$1/8$
$-0{,}5$	-1	$1/4$
$0{,}5$	1	$1/2$
1	2	$1/8$

Calcule las siguientes probabilidades:

a. $P(X < 0{,}5\ ,\ Y < 1{,}5)$

b. $P(X < 0{,}5)$

c. $P(Y < 1{,}5)$

d. $P(X > 0{,}25\ ,\ Y < 4{,}5)$

e. *Determine* $E(X)$ *y* $E(Y)$.

f. *Determine el rango de la distribución de probabilidad marginal de la variable aleatoria* X.

g. *Determine el rango de la distribución de probabilidad condicional de* Y *dado que* $X = 1$.

Ejercicio 4 *De un gran lote de impresoras descompuestas, se toman cuatro. A continuación se analiza y se clasifica cada una de acuerdo con la presencia de un defecto grande o pequeño. Sean* X *e* Y *las variables aleatorias que denotan el número de impresoras que tienen defectos grandes y pequeños, respectivamente. Determine el rango de la distribución de probabilidad conjunta de* X *e* Y.

Ejercicio 5 *En la fabricación de una cinta magnética, se coloca un rollo de cinta de* 24 *pulgadas en carretes de* 48 *y media pulgadas. Sean las variables aleatorias* X *e* Y *el número de carretes defectuosos en un rollo producido por un proveedor local y por uno internacional, respectivamente. Suponga que el número de carretes defectuosos de los dos proveedores sean independientes, y que la proporción de carretes defectuosos de los preveedores local e internacional sean* 2 % *y* 3 %, *respectivamente.*

a. *Describa el rango de la distribución de probabilidad conjunta de* X *e* Y.

b. *¿Cuál es la distribución de probabilidad marginal de* X*? ¿Cuál la de* Y*?*

c. *¿Cuál es el valor de* $P(X = 0\ ,\ Y = 0)$*?*

d. *¿Cuál es la probabilidad de que tanto* X *como* Y *sean menores o igual que uno?*

e. *¿Cuál es el valor de* $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$ *y* $V(Y)$*?*

Ejercicio 6 *¿Son independientes las variables aleatorias* X *e* Y *del primer ejercicio? Explique su respuesta.*

Ejercicio 7 *En la transmisión de información digital, la probabilidad de que un bit tenga una distorsión alta, moderada o baja es* 0,01, 0,04 *y* 0,95, *respectivamente. Suponga que se transmiten tres bits y que la cantidad de distorsión de cada uno es independiente. Sean* X *e* Y *las variables aleatorias que denotan el número de bits, de los tres transmitidos, que tienen una distersión alta o mederada, respectivamente.*

a. *¿Cuál es el rango de la probabilidad conjunta de* X *e* Y*?*

b. *Calcule* $P(X = 3\ ,\ Y = 0)$.

c. *Determine* $P(X = 2\ ,\ Y = 1)$.

d. *Determine* $P(X = 2\ ,\ Y = 0)$.

e. *¿Son independientes las variables aleatorias* X *e* Y*? Explique su respuesta.*

Ejercicio 8 *En un embarque muy grande de piezas, se sabe que el* 1 % *no cumple con las especificaciones. El proveedor inspecciona una muestra aleatoria de* 30 *piezas, y la variable aleatoria* X *denota el número de piezas de la muestra que no cumplen con las especificaciones. El comprador inspecciona otra muestra aleatoria de* 20 *piezas; la variable aleatoria* Y *es el número de piezas de esta muestra que no cumplen con las especificaciones. ¿Cuál es la probabilidad de que* $X \leq 1$ *e* $Y \leq 1$*?*

Ejercicio 9 *El 5 %, 80 % y 15 % de cierta producción de planchas de ferrita se clasifican en alto, medio o bajo según el número de huecos, respectivamente. Se toma una muestra de 20 planchas para someterlas a examen. Sean X, Y y Z el número de planchas clasificadas de manera independiente como alto, medio o bajo, respectivamente.*

a. *¿Cuáles son los nombres y los valores de los parámetros de la distribución de probabilidad conjunta de X, Y y Z?*

b. *¿Cuál es el rango de la distribución de probabilidad conjunta de X, Y, Z?*

c. *¿Cuáles son los nombres y los valores de los parámetros de la distribución de probabilidad marginal de X? Calcule $E(X)$ y $V(X)$.*

d. $P(X = 1 \ , Y = 16 \ , Z = 3)$

e. $P(X \leq 1 \ , Y = 16 \ , Z = 3)$

f. $P(X \leq 1)$

g. $P(X = 2 \ , Z = 3 \mid Y = 15)$

h. $P(X = 2 \mid Y = 17)$

Ejercicio 10 *Un pedido de 15 impresoras contiene cuatro con una característica de mejoramiemo de gráficas, cinco con memoria adicional y seis con ambas características. De este conjunto se eligen al azar cuatro impresoras, sin remplazo. Sean X, Y y Z las variables aleatorias que denotan el numero de impresoras en la muestra que tienen mejoramiento de gráficas, memoria adicional o ambas características, respectivamente.*

a. *Describa el rango de la distribución de probabilidad conjunta de X, Y y Z.*

b. *¿Es multinomial la distribución de probabilidad de X, Y y Z? Explique su respuesta.*

Ejercicio 11 *Se inspecciona una muestra de cuatro hornos electrónicos que se cayeron al ser embarcados, y se les clasifica de acuerdo con el tipo de defectos que presentan: grandes, menores o ninguno. En el pasado, 60 % de los hornos que se cayeron tuvieron un defecto grande; 30 % un defecto menor, y 10 % ningun defecto. Suponga que los defectos en los cuatro hornos se presentan de manera independiente.*

a. *¿Cuál es la probabilidad de que, de los cuatro hornos que forman la muestra, dos tengan un defecto grande y dos uno menor?*

b. *¿Cuál es la probabilidad de que ningun horno tenga un defecto? Determine la función de probabilidad conjunta del número de hornos que tienen un defecto mayor y del número de hornos que tienen un defecto menor.*

Ejercicio 12 *En la transmisión de informacion digital, la probabilidad de que un bit sufra una distorsión alta, moderada o baja es 0,01, 0,04 y 0,95, respectivamente. Suponga que se transmiten tres bits y que la cantidad de distorsión en cada uno de ellos es independiente.*

a. *¿Cuál es la probabilidad de que dos bits tengan una distorsión alta y uno una distorsión moderada?*

b. *¿Cuál es la probabilidad de que los tres bits tengan una distorsión baja?*

c. *Sea X el número de bits con distorsión alta de los tres transmitidos. ¿Cuál es la distribución de probabilidad, la media y la varianza de X?*

Ejercicio 13 *Determine la covarianza y la correlación de la siguiente distribución de probabilidad conjunta.*

x	y	$f_{XY}(x, y)$
1	3	1/8
1	4	1/4
2	5	1/2
3	6	1/8

Ejercicio 14 *Determine la covarianza y la correlación para X_1 y X_2 en la distribución conjunta de probabilidad multinomial de X_1, X_2, X_3 con $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ y $n = 3$. ¿Qué puede concluir sobre el signo de la correlación entre dos variables aleatorias de la distribución multinomial?*

Ejercicio 15 *La distribución de probabilidad conjunta de X e Y es*

x	y	$f_{XY}(x,y)$
-1	0	1/4
0	-1	1/4
0	1	1/4
1	0	1/4

Demuestre que la correlación entre X e Y es cero, pero que X e Y no son independientes.

Ejercicio 16 *Suponga que la correlación entre X e Y es ρ. Para las constantes a, b, c y d ¿cuál es la correlación entre las variables aleatorias $U = aX + b$ y $V = cY + d$?*

Ejercicio 17 *Si X e Y son variables aleatorias normales independientes con $E(X) = 0$, $V(X) = 4$, $E(Y) = 10$ y $V(Y) = 9$. Calcule lo siguiente:*

a. $E(2X + 3Y)$

b. $V(2X + 3Y)$

c. $P(2X + 3Y < 30)$

d. $P(2X + 3Y < 40)$

Ejercicio 18 *Suponga que la variable aleatoria X representa la longitud, en pulgadas, de un pieza perforada. Sea Y la longitud de la pieza en milímetros. Si $E(X) = 5$ pulgadas, ¿cuál es la media de Y?*

Ejercicio 19 *La envoltura de plástico para un disco magnético esta formada por dos hojas. El espesor de cada una tiene una distribución normal con media 1,5 milímetros y desviación estandar de 0,1 milímetros. Las hojas son independientes.*

a. *Determine la media y la desviación estandar del espesor total de las dos hojas.*

b. *¿Cuál es la probabilidad de que el espesor total sea mayor que 3,3 milimetros?*

Ejercicio 20 *El ancho del marco de una puerta tiene una distribución normal con media 24 pulgadas y desviación estandar de 1/8 de pulgada. El ancho de la puerta tiene una distribución normal con media 23 y 7/8 pulgadas y desviacion estandar de 1/16 pulgadas. Suponga que son independientes.*

a. *Determine la media y la desviación estandar de la diferencia entre el ancho del marco y el de la puerta.*

b. *¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia entre el ancho del marco y el de la puerta sea mayor que 1/4 de pulgada?*

c. *¿Cuál es la probabilidad de que la puerta no quepa en el marco?*

Ejercicio 21 *El llenado de las latas de una bebida suave lo hace una máquina de llenado automática, con una desviación estandar de 0,5 onzas de líquido. Suponga que los volúmenes con que se llenan las latas son variables aleatorias normales independientes.*

a. *¿Cuál es 1a desviación estandar del volumen de llenado promedio de 100 latas?*

b. *Si el volumen de llenado promedio es 12,1 onzas, ¿cuál es la probabilidad de que el volumen de llenado promedio de 100 latas sea menor que 12 onzas de líquido?*

c. *¿Cuál debe ser el valor del volumen de llenado promedio para que la probabilidad de que el promedio en 100 latas sea menor que 12 onzas de líquido sea 0,005?*

Ejercicio 22 *El espesor de la película fotoprotectora en un proceso de fabricación de semiconductores tiene una media de 10 micrómetros y una desviación estandar de 1 micrómetro. Supóngase que el espesor tiene una distribución normal, y que el espesor entre diferentes obleas es independiente.*

a. *Calcule la probabilidad de que el espesor promedio de 10 obleas sea mayor que 11 o menor que 9 micrómetros.*

b. *Determine el número de obleas que es necesario medir para qua la probabilidad sea 0,01 de que el espesor promedio sea mayor que 11 micrómetros.*